베소프 공간 노트

오정훈

서울대학교
통계학과

January 28, 2023

참고도서는 DeVore and Lorentz (1993)과 Giné and Nickl (2021)

목차

1 함수공간

1.1 L^p 공간

본 장에서는 실해석의 결과들을 간단히 돌아보도록 한다. $1 \leq p < \infty$ 이고 $A \subset \mathbb{R}$이 보렐집합일 때, 다음의 공간을 상기해보자.

$$L^p(A) = \left\{ f : A \to \mathbb{R} : \int_A |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

해당 공간의 노음은 아래와 같이 쓰였었다.

$$||f||_p := ||f||_{L^p(A)} = \left(\int_A |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$A \subset \mathbb{Z}$의 가산집합일 때는 dx를 셈측도[counting measure]로 정의했었고, 이에 대응되는 공간은 ℓ^p 공간이었다. 특별하게 $L^2(A)$ 공간은 다음의 내적이 주어진

$$\langle f, g \rangle = \int_A f(x)\overline{g(x)}dx$$

힐버트 공간이었다.

정의 1 (국소적분가능성(local integrability)) *함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 모든 유계 보렐집합 $B \subset \mathbb{R}$에 대하여*

$$\int_B |f(x)|dx < \infty$$

를 만족하면, 이를 국소적분가능(locally integrable)하다고 한다. 그리고 이러한 함수들의 공간을 $L^1_{loc}(A)$라 쓰자.

곧 전개될 내용에 앞서 다음의 표기법을 정리한다.

- $L^\infty(A)$, $L^\infty \equiv L^\infty(\mathbb{R})$: 노음이 $||f||_\infty := sup_x|f(x)|$으로 주어진 유계인 측도가능 함수들의 집합
- $C(A)$: 정의역을 A로 갖는 모든 연속함수들의 공간. $C^0(A)$로도 쓴다.
- $C^k(A)$: k차 도함수가 존재하고, 이들이 연속인 함수들인 공간. $1 \leq k \leq \infty$이고 $k = \infty$일 때 함수가 매끄럽다(smooth)고 한다.
- $C_u(A)$: 정의역을 A로 갖는 모든 균등연속함수들의 부분공간.
- $C_{per}(A)$: 반열린구간 A를 정의역으로 갖는 $f(a) = f(b)$를 만족하는 연속인 주기함수들의 공간.
- $C_c(A)$: $supp(f) \subset A$가 컴팩트집합인 연속함수 f들의 공간.

함수 f의 정규성(regularity)은 f의 도함수들의 L^p 노음의 크기로 평가할 수 있다. L^p 공간 아래에서 약미분가능한(weakly differentiable) 함수가 자연스럽게 정의가 되는데, 다음을 보자.

정의 2 (약미분가능성과 약도함수(weak differentiability and weak derivative)) *구간 $A \subset \mathbb{R}$와 함수 $f \in L^p(A)$가 주어졌고, 무한번 미분 가능하며 컴팩트 토대 $B \subset int(A)$를 갖는 임의의 함수 ϕ에 대하여*

$$\int_A f(u)\phi'(u)du = -\int_A Df(u)\phi(u)du$$

가 성립하는 함수 Df가 존재하면 f가 약미분가능(weakly differentiable)하다고 하고 Df를 f의 약도함수(weak derivative)라 한다.

위 함수 ϕ를 검정함수(test function)라 부른다.

정의 3 (검정함수(test function)) *$A \subset \mathbb{R}$에 대해, 검정함수들의 집합은 아래와 같이 정의된다.*

$$C_c^\infty(A) = \{f \in C^\infty(A) : supp(A) \subset int(A)\}$$

여기서 $supp(f) = \{x \in A : f(x) \neq 0\}$, $int(A)$는 A의 내부(interior).

참고 1

- *약도함수의 정의는 고전적(classical) 도함수 정의의 일반화이다.*
- *부분적분을 통해 고전적 도함수 f'와 약도함수 Df가 $f' = Df \quad a.e.$ 임을 알 수 있다.*
- *두 개념을 구분하기 위해, 차수(order)가 α인 약도함수는 $D^\alpha f$라 쓰고, 고전적 정의의 도함수는 $f^{(\alpha)}$로 쓰자.*
- *만일 Df가 거의 모든 점에서 연속이라면, 우리는 연속함수 $f^{(1)}$과 Df를 동일하다(identify)고 하기로 한다. 다시말해, $f^{(1)} = Df \quad a.e.$*

1.2 소볼레프 공간(Sobolev space)

소볼레프 공간은 소볼레프 노음이 주어진 벡터공간이다. 소볼레프 노음은 어떤 함수의 k차수 아래의 모든 도함수들의 L^p 노음을 결합한 것으로 정의된다. 소볼레프 공간의 역사는 편미분방정식으로부터 출발하였는데, 충분히 많은 수의 도함수를 갖는 함수공간에 대해 연구하기 위함이었다.

이제 L^p 구조 아래에서 약미분가능한 함수 f들의 공간인 소볼레프(Sobolev) 공간을 정의하자.

정의 4 (L^p - 소볼레프 공간) *$1 \le p < \infty$일 때, 차수 $m \in \mathbb{N}$의 L^p-소볼레프 공간은 다음과 같이 정의한다.*

$$H_p^m(A) = \{f \in L^p : D^j f \in L^p(A)\ \forall j = 1, \cdots, m : ||f||_{H_p^m(A)} := ||f||_p + ||D^m f||_p < \infty\}$$

위 정의는 Giné and Nickl (2021)의 정의를 가져온 것이다. 보통의 비모수추론에서는 f가 다변수함수인 것이 일반적이므로, 이에 대한 소볼레프 공간의 정의를 전개해야겠다. 먼저 다중 인덱스(multi-index)를 정의하자.

정의 5 (다중 인덱스(multi-index)) *원소 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ (음이 아닌 정수)를 다중 인덱스라 부른다. 이러한 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$에 대해, 미분연산자(differential operator)를 다음과 같이 쓴다. $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$, 이의 차수는 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$.* [1]

다변수 가정에서 약도함수의 정의는 아래와 같다.

정의 6 (약도함수(다변수)) *$\Omega \subset \mathbb{R}^d$이고 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$라 하자.*

$$\int_\Omega f D^\alpha \phi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\ \phi\, dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

를 만족하는 함수 $v \in L^1_{loc}(\Omega)$가 존재하면 이를 $v = D^\alpha f$라 쓰고, f의 약도함수라 칭한다.

다변수로 일반화된 소볼레프 공간은 아래와 같이 정의한다.

[1] 다중 인덱스는 d차원 정의역을 갖는 다변수함수 f에 대해 정의될 것이다. 예를 들어, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

정의 7 **(L^p 소볼레프 공간(다변수))** *정수 $k \geq 0$와 실수 $1 \leq p \leq \infty$에 대해,*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : |\alpha| \leq k\text{에 대해 } D^\alpha f \in L^p(\Omega)\text{가 존재.}\}$$

정의 8 **(소볼레프 노음)** *함수 $f \in W^{k,p}(\Omega)$에 대해 소볼레프 노음을 다음과 같이 정의한다.*

$$\begin{aligned} ||f||_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha f||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \\ ||f||_{W^{k,\infty}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha f||_{L^\infty(\Omega)}, \quad p = \infty \end{aligned}$$

$||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)}$는 f의 모든 약도함수들의 L^p-노음을 유한합한 것이고, 잘 정의됨을 알 수 있다.

참고 2

- *소볼레프 공간 $W^{k,p}(\Omega)$은 완비[complete]공간이다. 즉, 바나하 공간[Banach space]임이 알려져있다.*

1.3 베소프 공간(Besov Space)

함수의 정규성(regularity property)을 재는 방식에는 여러가지가 있다. 가장 많이 사용되는 방법으로는 함수 f의 도함수들에 L^p-norm 크기를 주는 것이다. 혹은 더 일반화된 방식으로 해당 함수의 국소 진동(local oscillations)에 대한 L^p 크기를 재는 것이 있다. 후자의 접근법이 횔더(Hölder), 립쉬츠(Lipschitz) 그리고 소볼레프(Sobolev) 공간의 매끄러움(smoothness) 조건을 모두 포괄하면서 동시에 함수의 p-변동(p-variation) 과도 관련성을 갖는다. 도함수와 연속성 계수(moduli of continuity)를 이동작용소(translation operator)의 관점에서 정의함으로써 관심의 대상인 함수공간을 매우 유용하게 다룰 수 있게 되는데, 조화해석학이 그 도구가 된다. 본 절에서는 이러한 개념을 망라하는 베소프 공간(Besov Space)을 만든다. 베소프 공간을 통해 우리는 함수의 정규성을 보다 일반적이고 유연한 방식으로 잴 수 있게된다. 더욱이 고전적 정의의 매끄러운 함수공간이 특수한 경우로써 베소프 공간에 포함됨을 보게 될 것이다. 또한 고차원 혹은 무한차원의 통계적 모형 역시 베소프 공간을 구조화 함으로써 나타낼 수 있게된다.

베소프 공간은 다양한 방식으로 정의될 수 있으며, 몇가지 정의를 제시하여 이들이 서로 동치임을 보이려고 한다. 먼저 실직선 $\mathbb{R}$ 위에서 베소프 공간을 정의한다. 물론 정의역이 실직선이 아닌 다양한 공간 위에서도 베소프 공간을 정의할 수 있다. 함수공간의 매장[embedding]에 대해 먼저 공부하고 넘어가자.

정의 9 **(연속매장(Continuous Embedding))** *두 노음공간 X와 Y가 노음 $||\cdot||_X$와 $||\cdot||_Y$를 갖고, $X \subseteq Y$라 하자. 포함사상(혹은 항등사상[identity map])*

$$id : X \hookrightarrow Y : x \mapsto x$$

이 연속이면, X가 Y에 연속적으로 매장됨(continuously embedded)이라 하고, $X \hookrightarrow Y$로 쓴다.

참고 3

- *위 조건을 다시말하면 보편상수* $C > 0$*가 존재하여* $||x||_Y \le C||x||_X$*가 성립.*

- $X \hookrightarrow Y$*이고* $Y \hookrightarrow X$*이면* $X = Y$ *그리고 이들의 두 노음은 서로 노음동치.*

- X, Y *두 노음공간 중 한 공간의 함수열에 대한 노음 수렴성(convergence in norm)이 이의 부분수열에 대한 거의 모든 수렴(convergence in a.e.)을 보장하면서*[2] $X \subseteq Y$*이면, 포함사상 id는 닫힌 그래프 [closed graph]가 되며 닫힌 그래프 정리에 의해 그 즉시 연속사상이 된다.*

- $X \subset Y$*이고* $Y \subset X$*를 통해* $X = Y$*임을 보이면 두 노음* $||\cdot||_X$*와* $||\cdot||_Y$*가 노음 동치임은 자명하다.*

매끄러움 계수[modulus of smoothness]를 정의하기 전에 이의 특별한 경우인 연속성 계수[modulus of continuity]를 소개한다. 연속성 계수는 0에서의 극소성[infinitesimal]을 가정하므로, 함수 f가 연속성 계수를 갖는다는 것은 f가 균등연속인 것과 동치이다. 또한 연속성 계수의 개념은 특정한 동등연속 함수족 [equicontinuous family]을 특징짓는 필요충분조건으로도 사용된다. 예를 들면 $\omega(t) := kt$는 k-립쉬츠 함수족의 조건과 같고, $\omega(t) := kt^{\alpha}$는 횔더 연속 함수족과 동치이며 $\omega(t) := kt(|\log t| + 1)$은 거의 립쉬츠[almost Lipschitz]인 함수들의 연속성 계수다.

정의 10 *(연속성 계수(Modulus of Continuity)) 연속성 계수란 확장 실수체계에서 정의된 임의의 증가함수* $\omega : [0, \infty] \to [0, \infty]$*가 0을 향해 수렴하고, 0에서 연속인 함수이다. 즉*

$$\lim_{t \to 0} \omega(t) = \omega(0) = 0.$$

를 만족한다.

연속성 계수에 대한 자세한 내용은 부록 참고.

참고 4

- *연속성 계수는 두 거리공간 사이의 함수* f*의 한 점에서의 연속성 혹은 균등연속성을 평가할 때 사용된다.*

- *함수* $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$*가 점* $x \in X$*에서 국소[local] 연속성 계수* ω*를 수용한다[admits]는 것은*

$$\forall x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \le \omega(d_X(x, x'))$$

- *또한* f*가 전역[global] 연속성 계수* ω*를 갖는다는 것은*

$$\forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \le \omega(d_X(x, x'))$$

다음으로는 이동작용소[translation operator]를 소개한다. 단순하게 함수 f를 정의역에서 횡이동 시키는 연산자이다.

[2] $||f_n - f|| \to 0 \implies |f_{n_k}(x) - f(x)| \to 0 \quad for\ a.a. - x$

정의 11 (이동작용소(translation operator)) *$\mathbb{R}$의 부분구간 A위에 정의된 함수 f에 대해, 이동작용소 τ_h, $h \in \mathbb{R}$을 다음과 같이 정의한다.*

$$\tau_h(f)(x) = f(x+h), \quad x+h \in dom(f)\ (= A)$$

차분작용소[difference operator]는 이동작용소에서 횡이동한 함수값의 변화량을 나타낸다.

정의 12 (차분작용소(difference operator)) *차분작용소는 $\Delta_h = \tau_h - id$로 정의한다. 즉*

$$\Delta_h(f) = f(\cdot + h) - f(\cdot)$$

귀납적으로 다음의 사실을 알 수 있다. $\Delta_h^r \equiv \Delta_h[\Delta_h^{r-1}] = (\tau_h - id)^r$, $r \geq 1$라 하면

$$\Delta_h^r(f)(x) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f(x+kh)$$

참고 5

- *$A = \mathbb{R}$이면 연산자 Δ_h^r은 모든 점에서 정의된다.*
- *$A = [a,b]$, $h > 0$이면 정의역은 $A_{rh} = [a, b-rh]$이다. 이 경우 $\Delta_h^r(f)(x) \equiv 0$, $\forall x \in A \setminus A_{rh}$로 정의.*

이제 매끄러움 계수를 정의할 수 있다.

정의 13 (매끄러움 계수(Modulus of Smoothness)) *$f \in L^p(A)$, $1 \leq p \leq \infty$라 하자. r-th 매끄러움 계수는*

$$\omega_r(f,t) \equiv \omega_{r,p}(f,t) = \sup_{0<h\leq t} ||\Delta_h^r(f)||_p, \quad t > 0$$

혹은 정의역을 더 명시적으로 지켜서 $\omega_{r,p}(f,t) = \sup\limits_{0<h\leq t} ||\Delta_h^r(f)||_p(A_{rh})$로 쓰기도 한다.

차분작용소와 매끄러움 계수의 더 자세한 내용은 부록을 참조.

참고 6

- *위 정의를 구체적으로 써보면*

$$\omega_{r,p}(f,t) = \begin{cases} \sup\limits_{0<h\leq t} \left(\int_{A_{rh}} |\Delta_h^r(f)(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup\limits_{0<h\leq t} \sup\limits_{x \in A_{rh}} |\Delta_h^r(f)(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

- *$r = 1$이고 $p = \infty$일 때 매끄러움 계수가 연속성 계수이다.*

마침내 베소프 공간을 정의할 준비가 끝났다. 베소프 공간은 매개변수 q를 추가해서 매끄러움 계수 $\omega_{r,p}(f, \cdot)$에 q-노음을 주는 방식으로 정의한다.

정의 14 (베소프 공간 $B^\alpha_{p,q}(\Omega)$ (Besov Space)) *$\alpha > 0,\ r := \lceil \alpha \rceil$라 하자. $0 < p, q \le \infty$에 대하여, 함수 $f \in L^p(\Omega)$의 베소프 준노음(seminorm) $|\cdot|_{B^\alpha_{p,q}}$을*

$$|f|_{B^\alpha_{p,q}} := ||\omega_{r,p}(f,\cdot)||_{\alpha,q} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left[t^{-\alpha}\omega_{r,p}(f,t)\right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{-\alpha}\omega_{r,p}(f,t), & q = \infty \end{cases}$$

와 같이 정의한다. 베소프 공간 $B^\alpha_{p,q}(\Omega)$의 노음은 $||f||_{B^\alpha_{p,q}} := ||f||_p + |f|_{B^\alpha_{p,q}}$이고 $B^\alpha_{p,q}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \mid ||f||_{B^\alpha_{p,q}} < \infty\}$

참고 7

- *$p, q < 1$이 가능함에 주목하자. 이 셋팅에서는 베소프 공간은 더이상 바나하 공간이 아니고, 반 바나하 (quasi-Banach)공간이 된다.*

2 부록

2.1 연속성 계수(Moduli of Continuity)

임의의 거리공간 A 위에 정의된 함수 f에 대한 연속성 계수 $\omega(f,t) := \omega(t)$는 아래와 같이 정의한다. 편의상 $A = \mathbb{R},\ \mathbb{R}_+,\ \mathbb{T}$로 생각한다.

Definition 2.1 (연속성 계수(moduli of conitinuity))

$$\omega(t) := \omega(f,t) := \sup_{\substack{|x-y|\le t \\ x,y\in A}} |f(x) - f(y)|, \quad t \ge 0 \tag{1}$$

참고 8

- *A가 유계집합이면 모든 $t \ge diamA$ 에 대하여 $\omega(t)$는 상수이다.*
  $\because \quad t \ge diamA$ 에 대해 $\displaystyle\sup_{\substack{|x-y|\le diamA \\ x,y\in A}} |f(x) - f(y)| = \sup_{\substack{|x-y|\le t \\ x,y\in A}} |f(x) - f(y)|$ 으로 동일.
- *ω가 $t = 0$에서 연속 $\iff$ f가 A위에서 균등연속.*
- *$f \in C_u(A)$, 균등연속이라 가정하자.*

성질 1 (연속성 계수의 네가지 성질) *균등연속함수 f의 연속성 계수 w에 대하여, 다음이 성립한다.*

1. *$\omega(t) \to w(0) = 0, \quad for \quad t \to 0$;*
2. *ω is non-negative and non-decreasing on $\mathbb{R}_+$;*
3. *ω is subadditive: $\omega(t_1 + t_2) \le \omega(t_1) + \omega(t_2)$;*

4. ω 는 $\mathbb{R}_+$에서 연속.

증명 1.은 자명하므로 생략한다. 2.는 $t_1 < t_2$ 일때 집합관계

$$\{x, y \in A : |x-y| \leq t_1\} \subseteq \{x, y \in A : |x-y| \leq t_2\}$$

에 의해 알수있고, 3.은 $|x-y| \leq t_1 + t_2$라 할때, $|x-z| \leq t_1$와 $|y-z| \leq t_2$를 만족하는 점 $z \in A$를 잡아올 수 있다. 삼각부등식을 쓰면

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$$

에 의해 성립. 더욱이 3.으로부터

$$|\omega(t_1 + t_2) - \omega(t_1)| \leq \omega(t_2)$$

를 알 수 있다. 1. 2. 3.에 보인바에 따라 $t \in \mathbb{R}_+, \quad h \searrow 0$ 이면 $|\omega(t+h) - \omega(t)| \leq \omega(h) \searrow 0$에 의해 4.도 성립.

참고 9

- 3.*에 의해 귀납적으로* $\omega(t_1 + \cdots + t_n) \leq \omega(t_1) + \cdots + \omega(t_n)$*임을 알 수 있다.*
- $t = t_1 = \cdots = t_n$*으로 놓으면,* $\omega(nt) \leq n\omega(t)$
- $\lambda \geq 0$*에 대해* $\omega(\lambda t) \leq (\lambda + 1)\omega(t)$*도 성립.*
  $\because\ n \leq \lambda < n+1,$

$$\omega(\lambda t) \leq \omega((n+1)t) \leq (n+1)\omega(t) \leq (\lambda+1)\omega(t)$$

성질 2 *연속성 계수는 지나치게 작을 수 없다. i.e.*

$$\textit{If} \quad \frac{\omega(f,t)}{t} \to 0 \quad \textit{for} \quad t \to 0, \quad \textit{then} \quad f'(x) \equiv 0 \quad \textit{and} \quad f \textit{ is constant.}$$

증명 결론을 부정하면 $x \in A$가 존재하여

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \forall t > 0 \quad : \quad \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \geq \varepsilon_0 \quad \text{for some } y \in A \ : \ |y - x| < t$$

충분히 작은 모든 $\delta < |y-x|$에 대하여

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{\delta} \right| \geq \varepsilon_0$$

가 성립. 그러므로, $\omega(f, \delta)/\delta \geq \varepsilon_0$가 성립. 이는 가정에 모순된다.

다음은 알아두면 유용한 오목함수에 대한 성질 하나를 소개한다.

성질 3 *오목함수* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *가* $f(0) = 0$*을 만족하면* $f(x)/x$*는 감소함수이다.*

증명 $0 < x < y$ 라 하자. 오목성에 의해

$$\frac{x}{y} f(y) = \frac{y-x}{y} f(0) + \frac{x}{y} f(y) \leq f(x)$$

이 아래는 연속성 계수의 몇가지 예시들을 첨부할 것.(미완)

2.2 매끄러움 계수(Moduli of Smoothness)

앞서 보인 성질에 따라 $\omega(f,t) = o(t)$이면 f는 상수함수가 되기 때문에, 연속성 계수는 높은 차수의 매끄러움을 재는 데 유용하지 않다. 그러므로 높은 차수의 함수들에 대해서는 매끄러움 계수를 사용하여 표현한다. 본문에서 언급한 함수의 r차 차분을(r-th order difference) 다시 써보면

성질 4 $\Delta_h^r \equiv \Delta_h[\Delta_h^{r-1}] = (\tau_h - id)^r,\ r \geq 1$*라 하면*

$$\Delta_h^r(f)(x) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f(x+kh)$$

증명 $\Delta^0(f)(x) \equiv f(x)$로 정의하자. $r = 1$일 때,

$$\Delta^1(f)(x) = f(x+h) - f(x) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} f(x+kh)$$

$r \geq 1$에 대해

$$\Delta^r(f)(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} f(x+kh)$$

가 성립한다고 가정하면 $r+1$은

$$\begin{aligned}
\Delta^{r+1}(f)(x) &= \Delta_h\left[\Delta_h^r(f)(x)\right] \\
&= \Delta_h^r(f)(x+h) - \Delta_h^r(f)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \left(f(x+kh+h) - f(x+kh)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f(x+kh+h) + \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k+1} f(x+kh) \\
&= \sum_{k=1}^{r+1} \binom{r}{k-1} (-1)^{r+1-k} f(x+kh) + \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k+1} f(x+kh) \\
&= \sum_{k=1}^{r+1} \left[\binom{r}{k-1} + \binom{r}{k}\right] (-1)^{r+1-k} f(x+kh) \\
&= \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} (-1)^{r+1-k} f(x+kh)
\end{aligned}$$

위의 이항정리식 $\Delta_h^r(f)$는 무엇을 뜻할까? 이는 함수 f의 유한 차분(finite difference)의 일반화된 식이다. 즉 Δ_h^r은 함수의 r차 차분(r-th order difference)이다. 먼저 유한차분에 대해 간단히 소개한다. 유한차분에는 기본적인 세가지 유형이 있다.

정의 15 (유한차분(finite difference)) $A = dom(f), \quad x \in A, \quad h \in \mathbb{R}$*이라 하자.*

1. *전향차분(forward difference)*

$$\Delta_h(f)(x) = f(x+h) - f(x)$$

2. 후진차분(backward difference)

$$\nabla_h(f)(x) = f(x) - f(x-h) = \Delta_h(f)(x)$$

3. 중심차분(central difference)

$$\delta_h(f)(x) = f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2}) = \Delta_{h/2}(f)(x) + \nabla_{h/2}(f)(x)$$

함수 f의 도함수는 세가지 차분으로 모두 계산할 수 있다. 즉,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+\frac{h}{2})-f(x-\frac{h}{2})}{h}$$

2차 도함수 역시 마찬가지로, 근사식으로 나타내면

$$\begin{aligned}
f''(x) &\approx \frac{\Delta_h^2(f)(x)}{h^2} = \frac{\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h} = \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} \\
f''(x) &\approx \frac{\nabla_h^2(f)(x)}{h^2} = \frac{\frac{f(x)-f(x-h)}{h} - \frac{f(x-h)-f(x-2h)}{h}}{h} = \frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2} \\
f''(x) &\approx \frac{\delta_h^2(f)(x)}{h^2} = \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h} = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}
\end{aligned}$$

여기까지 보았다면 왜 $\Delta_h^r(f)$가 유한차분의 일반화인지 알게되었을 것이다. r차 도함수들의 근사값들이 f의 차분들에 대한 r차 이항정리식으로 표현됨을 알 수 있다. 다시말해 위에서 정의한 식 $\Delta_h^r(f)(x) = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}f(x+kh)$은 $f^{(r)}$에 대한 전향차분 근사식이다. 본문의 매끄러움 계수 정의를 다시 보자.

정의 16 (매끄러움 계수(Modulus of Smoothness)) *$f \in L^p(A)$, $0 < p < \infty$라 하자. r-th 매끄러움 계수는*

$$\omega_r(f,t) \equiv \omega_{r,p}(f,t) = \sup_{0<h\le t} ||\Delta_h^r(f,\cdot)||_p(A_{rh}), \quad t > 0$$

$f \in C(A)$ 또는 $C_u(A)$의 함수클래스에도 정의할 수 있다. 이런 경우에는 노음이 $p = \infty$. A_{rh}는 $A_{rh} = [a, b-rh]$에서의 적분을 의미.

직관적으로 해석해보면 매끄러움 계수는 양수 $t \ge 0$으로 조절된 범위에서 함수 f의 r-차 전진차분 기울기를 p-노음으로 그 크기를 재었을 때의 최댓값이다. 소볼레프 공간에서 f의 $|\alpha|$-차수 약도함수 $D^\alpha f$의 p-노음들로 소볼레프 노음을 정의하였고, 이것이 곧 함수의 매끄러움을 재는 크기로 사용되었는데, 매끄러움 계수는 함수 f의 기울기 차분으로 정의함으로써 약도함수보다도 약한 조건임을 알 수 있다.

참고 10

- *매끄러움 계수는 연속성 계수와 같은 성질을 지닌다.* $\omega_{r,p}(f,t)$*는 모든* t*값에서 유한으로 잘 정의되고,* $t \geq 0$*에서 연속이고 양수값을 갖는 증가함수이면서* $\omega_{r,p}(f,0) = 0$.
  체크해보자. $f \in L^p(A), \quad 1 \leq p < \infty$*일 때, 민코프스키 부등식을 쓸 수 있으므로*

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^r(f,\cdot)\|_p &= \|\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f(\cdot + kh)\|_p \\ &\leq \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \|f(\cdot + kh)\|_p < \infty, \quad \textit{for all } 0 < h < \frac{b-a}{r}. \end{aligned}$$

  $0 < p < 1$*의 케이스는 잘 알려진 부등식* $\|f+g\|_p \leq 2^{\frac{1-p}{p}}(\|f\|_p + \|g\|_p), \quad f,g \in L^p$*를 사용하면 된다.* [3] $f \in C(A)$ *혹은* $C_u(A)$*의 경우에는* $\sup_{x\in\mathcal{X}} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in\mathcal{X}} |f(x)| + \sup_{x\in\mathcal{X}} |g(x)|$*에 의해 성립.*

- 또 $1 \leq p \leq \infty$*일때*

  1. $\omega_{r,p}(f+g,t) \leq \omega_{r,p}(f,t) + \omega_{r,p}(g,t), \quad f,g \in L^p$
  2. $\omega_{r,p}(cf,t) = |c|\omega_{r,p}(f,t)$

  임을 어렵지 않게 알 수 있다. 따라서 $\omega_{r,p}(\cdot,t)$*는* L^p*공간의 반노음(seminorm)이 된다.*

- $0 < p < 1$*일때는*

$$\omega_{r,p}(f+g,t)^p \leq \omega_{r,p}(f,t)^p + \omega_{r,p}(g,t)^p$$

  으로 대체된다.

참고문헌

DeVore, R. A. and Lorentz, G. G. (1993). *Constructive approximation*, volume 303. Springer Science & Business Media.

Giné, E. and Nickl, R. (2021). *Mathematical foundations of infinite-dimensional statistical models.* Cambridge university press.

[3] 오목함수 $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$가 subadditive한 것과 $x \mapsto x^p$가 오목인 것을 이용해서 차례대로 보일 수 있다.